UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA - FIM

MT 227B Control Moderno y Óptimo

Examen Final - 18/07/2013

Problema 1: Estabilidad según Lyapunov

a. El siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (u - x_1)(1 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= (x_1 - 2x_2)(1 + x_1^2) \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

es controlado por la realimentación de salidas:

$$u = -Ky$$

a) (**2 ptos**) Para todos los valores de la ganancia K, determinar los puntos de equilibrio del sistema en lazo cerrado.

b. Considere el sistema escalar:

$$\dot{x} = ax^3.$$

a) (**1 pto**) Usar la función de Lyapunov candidata, $V(x) = x^4$, para mostrar que el punto de equilibrio $x = 0$ es asintóticamente estable para $a < 0$.

b) (**1 pto**) ¿Qué puede decir en relación a la estabilidad del punto de equilibrio $x = 0$ cuando $a = 0$?.

Problema 4: Control LQG

La figura muestra un tanque con un sistema de control de nivel y un observador. El observador será usado para estimar el flujo de salida $d(t)$, el cual representa un disturbio en el tanque; el flujo estimado servirá de entrada al control por alimentación directa. El nivel del tanque $h(t)$ es medido.

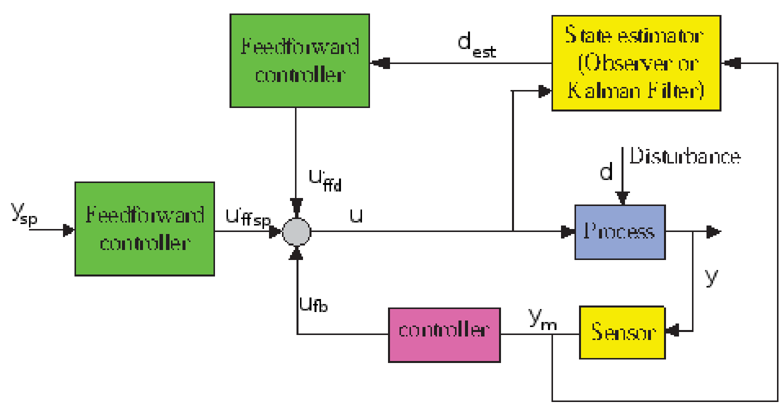
El modelo de la variación del nivel en el tanque es:

$$\dot{h}(t) = \frac{1}{A_{tank}}[\alpha u(t) - d(t)],$$

donde $A_{tank} = 0{,}1\,\mathrm{m}^2$, $\alpha = 0{,}002\,(\mathrm{m}^3/\mathrm{s})/\mathrm{V}$.

El flujo de salida $d(t)$ se asume constante, así se puede usar el siguiente modelo para describir su comportamiento:

$$\dot{d}(t) = 0.$$



(3) Diagrama de bloques del sistema tanque

a. (**1 pto**) Considerar el vector de estados $x = \begin{bmatrix} h(t) & d(t) \end{bmatrix}$ y escribir la representación espacio de estados del sistema aumentado.

b. (**2 ptos**) Calcular el filtro de Kalman (observador) para el sistema aumentado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + w(t) \\ y(t) &= Cx + v(t) \end{aligned}$$

Considerar un ruido de proceso con matriz de covarianza $W = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0 \\ 0 & 0{,}0001 \end{bmatrix}$ y un ruido de medida con varianza $V = 0{,}000001\ \mathrm{m}^2$. Escribir el filtro de Kalman en su representación espacio de estados.

Ayuda: Notar que la solución de la ecuación de Riccatti debe ser una matriz $P = \begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix}$.

c. (**1 pto**) Calcular la ganancia K_{LQR} bajo el siguiente índice de desempeño:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(h^2 + 10u^2)dt.$$

Nota: En esta parte no se debe incluir la dinámica del disturbio.

d. (**1 pto**) Reescribir el diagrama de bloques de la figura considerando explicítamente la forma del proceso, sensor, observador y controladores. Asumir $u_{ffd} = K_{ffd}\hat{d}$ y $u_{ffsp} = K_{ffsp}y_{sp}$ (y_{sp} es una referencia constante).

e. (**1 pto**) Calcular la representación espacio de estados del compensador que deberá ser implementado en un microcontrolador. Presentar el compensador de forma literal (no usar números).

Solución Problema 1

a. El sistema en lazo cerrado resulta:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (-Kx_2 - x_1)(1 + x_2^2)\\ \dot{x}_2 &= (x_1 - 2x_2)(1 + x_1^2)\end{aligned}$$

a) Para calcular el punto de equilibrio se debe cumplir:

$$\begin{aligned}0 &= (-Kx_2 - x_1)(1 + x_2^2)\\ 0 &= (x_1 - 2x_2)(1 + x_1^2)\end{aligned}$$

Entonces, para $K \neq -2$, el origen (0,0) es el punto de equilibrio único. Y cuando $K = -2$, la línea $x_1 = 2x_2$ es el conjunto de puntos de equilibrio.

b. Sea el sistema escalar:

$$\dot{x} = ax^3.$$

a) Usando la función de Lyapunov, $V(x) = x^4$, se cumple $V(0) = 0$, $V(x) \in \mathcal{C}^1$, $V(x) \neq 0$ para $x \neq 0$, y $V(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$. Luego $V(x)$ satisface las condiciones para ser una función de Lyapunov candidata, y su derivada en el tiempo es:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = 4ax^6,$$

que es definida negativa para $a < 0$. Usando el teorema de estabilidad de Lyapunov el punto de equilibrio $x = 0$ es asintóticamente estable globalmente.

b) Para $a = 0$, el sistema es lineal y está dado por:

$$\dot{x} = 0.$$

El sistema posee soluciones $x(t) = x_o$ para todo t. Entonces, el sistema es estable.

Solución Problema 4

a. El sistema aumentado con la dinámica del disturbio es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} h \\ d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}02 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b. Resolviendo la ecuación de Riccati para el sistema dual:

$$PA^T + AP - PC^T\sigma_v^{-1}CP + G\sigma_w G^T = 0$$

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} 10^6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0 \\ 0 & 0{,}0001 \end{bmatrix} = 0,$$

se tiene:

$$\begin{aligned} -20p_2 - 10^6 p_1^2 + 0{,}01 &= 0 & & p_1 = 0{,}1010\, 10^{-3} \\ -10p_3 - 10^6 p_1 p_2 &= 0 \;\rightarrow & & p_2 = -10^{-5} \\ 0{,}0001 - 10^6 p_3^2 &= 0 & & p_3 = 0{,}1010\, 10^{-3} \end{aligned}$$

de donde $P = 10^{-3}\begin{bmatrix} 0{,}1010 & -0{,}01 \\ -0{,}01 & 0{,}1010 \end{bmatrix}$, y por consiguiente: $L = PC^T\sigma_v^{-1} = \begin{bmatrix} 100{,}995 \\ -10 \end{bmatrix}$.

Luego el filtro de Kalman:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{f} \end{bmatrix} + L\left(y - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{d} \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{d} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -100{,}995 & -10 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100{,}995 \\ -10 \end{bmatrix} y \\ \hat{x} &= I\begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{d} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c. Sin incluir la dinámica del disturbio se tiene:

$$\frac{d}{dt}h(t) = -10d(t) + 0{,}02u(t)$$

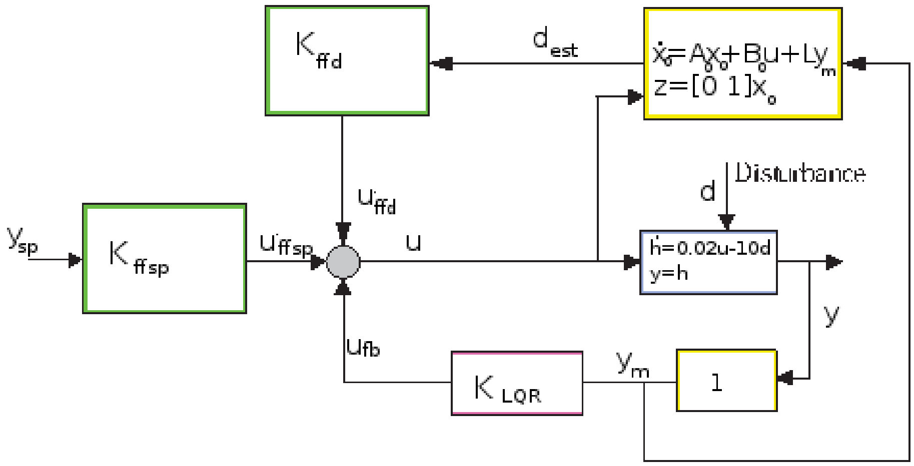
Resolviendo la ecuación de Riccati correspondiente:

$$PA + A^TP - PBR^{-1}B^TP + Q = 0$$

$$-p * 0{,}02 * 0{,}1 * 0{,}02 * p + 1 = 0, \rightarrow p = 158{,}114,$$

y por consiguiente: $K_{LQR} = R^{-1}B^TP = 3{,}1623$.

d. El diagrama de bloques de la figura resulta:



(4) Diagrama de bloques del sistema tanque

e. La representación espacio de estados del compensador para implementación, cuando solo se usa el disturbio estimado $\hat{d}$ es:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{x} &= (A - LC + B \begin{bmatrix} 0 & K_{ffd} \end{bmatrix})\hat{x} + (L - BK_{LQR})y_m + BK_{ffr}x_d \\
u &= -\begin{bmatrix} 0 & K_{ffd} \end{bmatrix} \hat{x} - K_{LQR}y_m + K_{ffr}x_d
\end{aligned}
$$

Se puede también considerar el estado estimado $\hat{h}$, luego el compensador resulta:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{x} &= (A - LC - B \begin{bmatrix} K_{LQR} & -K_{ffd} \end{bmatrix})\hat{x} + Ly_m + BK_{ffr}x_d \\
u &= -\begin{bmatrix} K_{LQR} & -K_{ffd} \end{bmatrix} \hat{x} + K_{ffr}x_d
\end{aligned}
$$